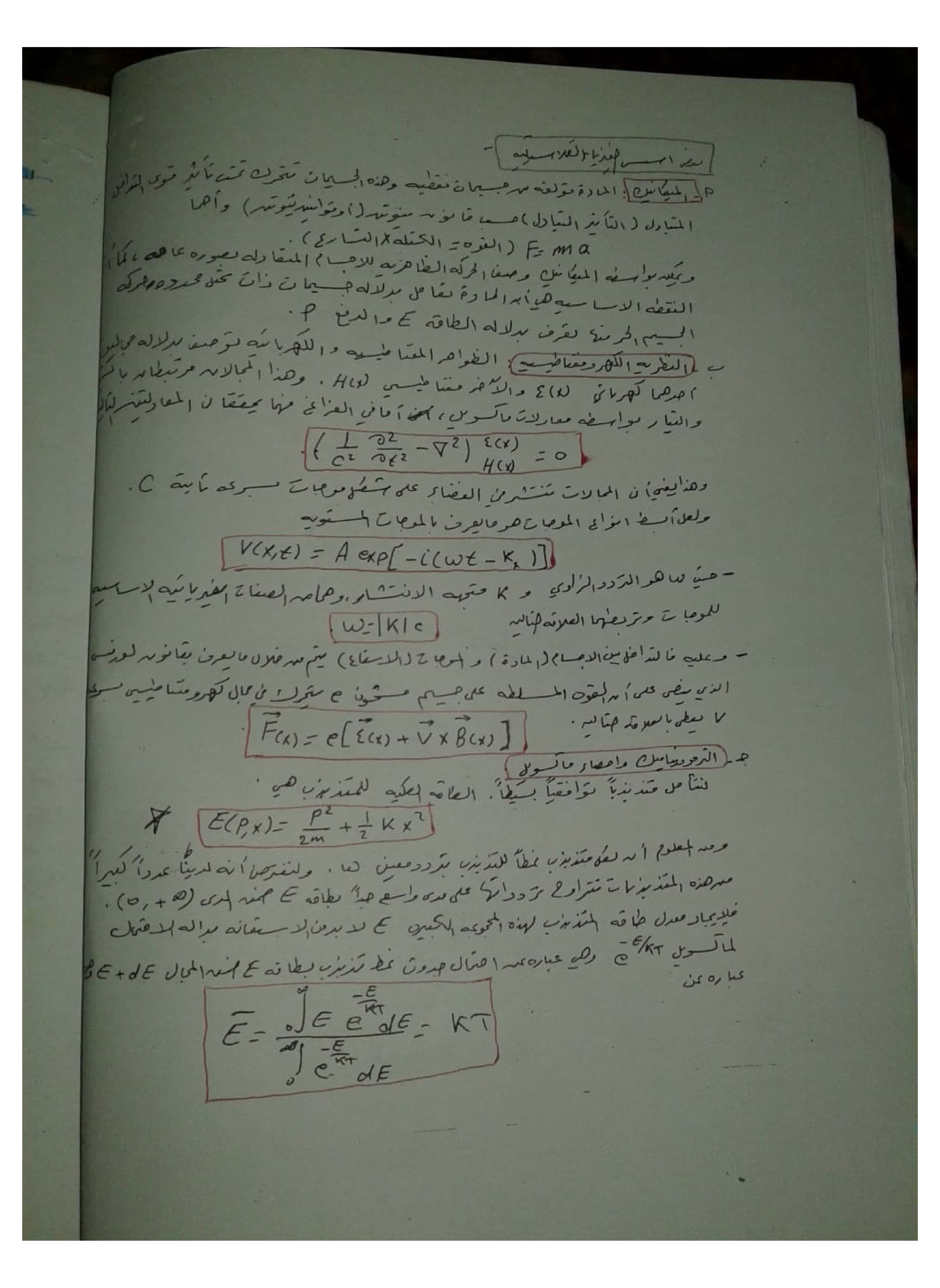


بعض أسس الفيزياء الكلاسيكية -

أ- الميكانيك: المادة مؤلفة من جسيمات نقطية وهذه الجسيمات تتحرك تحت تأثير قوى التراكيب المتبادل (التأثير المتبادل) حسب قانون نيوتن (وقوانين نيوتن) وأهمها (القوة = الكتلة × التسارع) $F = ma$

ويمكن بواسطة الميكانيك وصف الحركة الظاهرية للأجسام المتقادلة بصورة عامة، لكن النقطة الأساسية هي أن المادة تعامل بدلالة جسيمات ذات تحل محدود وحركة الجسيم الحرية تعرف بدلالة الطاقة E والزخم p.

ب- النظرية الكهرومغناطيسية: الظواهر المغناطيسية والكهربائية توصف بدلالة مجالين أحدهما كهربائي $\varepsilon(x)$ والآخر مغناطيسي $H(x)$. وهذان المجالان مرتبطان بالشحنة والتيار بواسطة معادلات ماكسويل، أما في الفراغ فإنهما يحققان المعادلتين التاليتين

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \begin{matrix}\varepsilon(x)\\ H(x)\end{matrix} = 0$$

وهذا يعني أن المجالات تنتشر في الفضاء على شكل موجات بسرعة ثابتة C.

ولعل أبسط أنواع الموجات هو ما يعرف بالموجات المستوية

$$V(x,t) = A\exp[-i(\omega t - K_x)]$$

- حيث ω هو التردد الزاوي و K متجه الانتشار، وهما الصفات الفيزيائية الأساسية للموجات ويربطهما العلاقة التالية

$$\omega = |K| c$$

- وعليه فالتداخل بين الأجسام (المادة) والموجات (الإشعاع) يتم من خلال ما يعرف بقانون لورنس الذي ينص على أن القوة المسلطة على جسيم مشحون e يتحرك في مجال كهرومغناطيسي بسرعة V يعطى بالعلاقة التالية.

$$\vec{F}(x) = e[\vec{\varepsilon}(x) + \vec{V} \times \vec{B}(x)]$$

جـ- الثرموديناميك وإحصاء ماكسويل

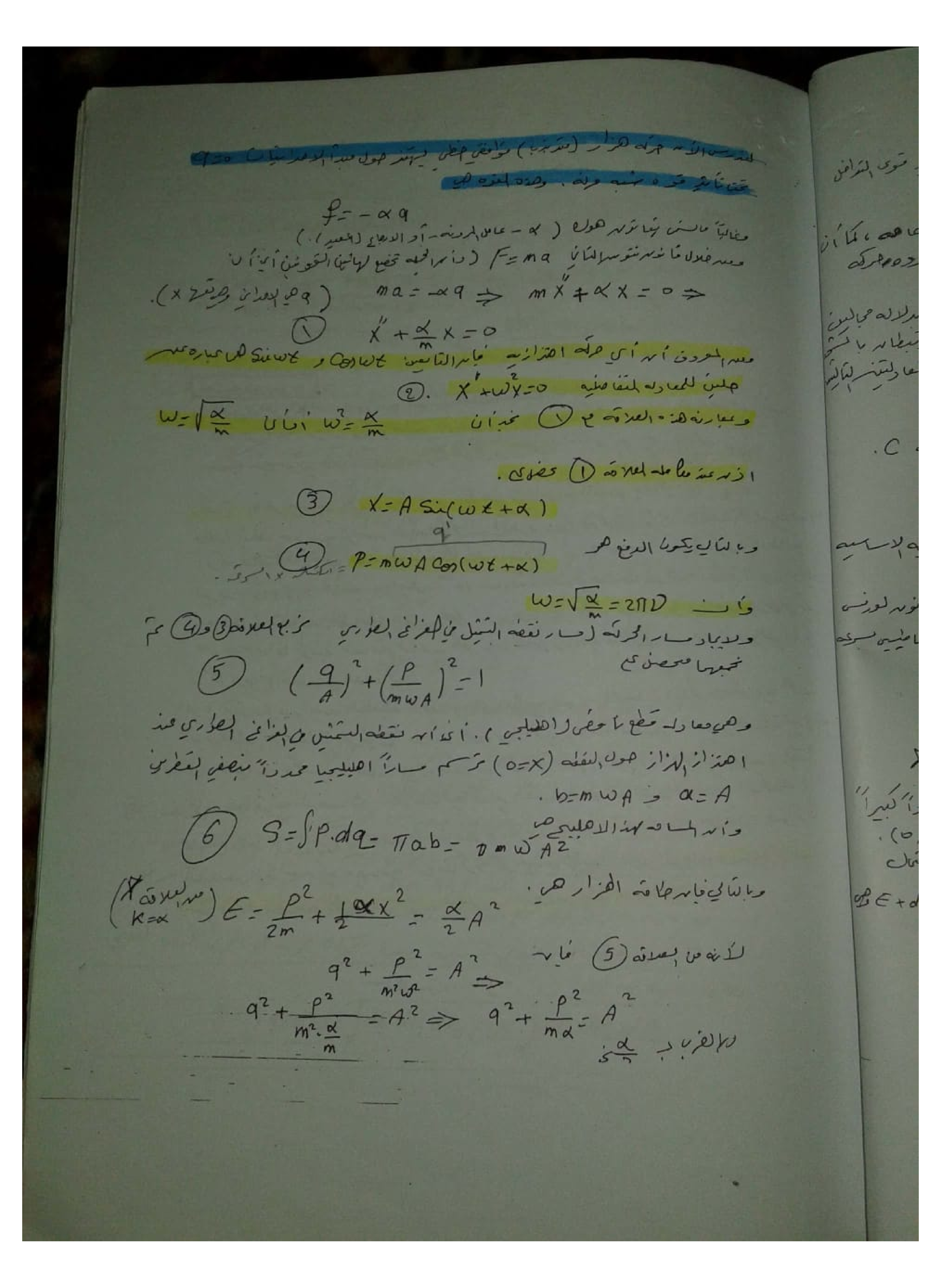
لنتأمل متذبذباً توافقياً بسيطاً. الطاقة الكلية للمتذبذب هي:

$$E(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2$$

ومن المعلوم أنه لكل متذبذب نمطاً للتذبذب بتردد معين ω. ولنفترض أنه لدينا عدداً كبيراً من هذه المتذبذبات تتراوح تردداتها على مدى واسع جداً بطاقة E ضمن المدى $(0, +\infty)$. فلإيجاد معدل طاقة المتذبذب لهذه المجموعة الكبيرة E لابد من الاستعانة بدالة الاحتمال لماكسويل $e^{-E/KT}$ وهي عبارة عن احتمال حدوث نمط تذبذب بطاقة E ضمن المجال E و $E + dE$ عبارة عن

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E\, e^{-\frac{E}{KT}} dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{KT}} dE} = KT$$

Scanned by CamScanner



لندرس الآن حركة هزاز (متذبذب) توافقي خطي يهتز حول مبدأ الإحداثيات $q=0$ تحت تأثير قوة شبه مرنة، وهذه القوة هي

$$f = -\alpha q$$

وغالباً ما نسمي هذه القوة بقوة هوك (α - عامل المرونة - أو الإرجاع (التعيير)).

ومن خلال قانون نيوتن الثاني $F = ma$ (وإن الحركة تخضع لقانون التعويض أي أن):

$$ma = -\alpha q \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha x = 0 \Rightarrow$$

(q هي الإحداثي وهي تعادل x).

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} x = 0 \quad (1)$$

ومن المعروف أن أي حركة اهتزازية فإن التابعين $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ هي عبارة عن حلين للمعادلة التفاضلية

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

وبمقارنة هذه العلاقة مع (1) نجد أن $\omega^2 = \frac{\alpha}{m}$ أي أن $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

إذن عند مكاملة العلاقة (1) نحصل:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

وبالتالي يكون الدفع هو

$$p = m\omega A\cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

(فوق العلاقة: q'؛ وبجانبها بخط باهت: = المكاملة ... المسرّع.)

وأن $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 2\pi\nu$

ولإيجاد مسار الحركة (مسار نقطة التمثيل في الفراغ الطوري) نربع العلاقتين (3) و (4) ثم نجمعهما فنحصل على

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{m\omega A}\right)^2 = 1 \quad (5)$$

وهي معادلة قطع ناقص (إهليلجي)، أي أن نقطة التمثيل في الفراغ الطوري عند اهتزاز الهزاز حول النقطة ($x=0$) ترسم مساراً إهليلجياً محدداً بنصفي القطرين $a = A$ و $b = m\omega A$.

وأن المساحة لهذا الإهليلجي هي

$$S = \oint p\,dq = \pi ab = \pi m\omega A^2 \quad (6)$$

وبالتالي فإن طاقة الهزاز هي:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\alpha x^2 = \frac{\alpha}{2}A^2$$

(من العلاقة (X) $k=\alpha$)

لأنه من العلاقة (5) فإن

$$q^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2} = A^2 \Rightarrow$$

$$q^2 + \frac{p^2}{m^2 \cdot \frac{\alpha}{m}} = A^2 \Rightarrow q^2 + \frac{p^2}{m\alpha} = A^2$$

بالضرب بـ $\frac{\alpha}{2}$

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha q^2}{2} = \frac{\alpha}{2} A$$

وبالتالي فإنه بتعويض قيمة S الداله من (6)

$$\mathcal{E} = \frac{S\alpha}{2\pi m\omega} = \nu \oint p.dq$$

(أي أن التوصل من قيمة الطاقة)

من العلاقة (B)
$$\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2} A^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{S}{\pi m\omega}\right) = \frac{\alpha \oint p\,dq}{2\pi m\omega} = \frac{m\omega^2 \oint p\,dq}{2\pi m\omega} \Rightarrow$$

$$\left(\mathcal{E} = \frac{\omega \oint p\,dq}{2\pi} = \nu \oint p.dq \right.$$

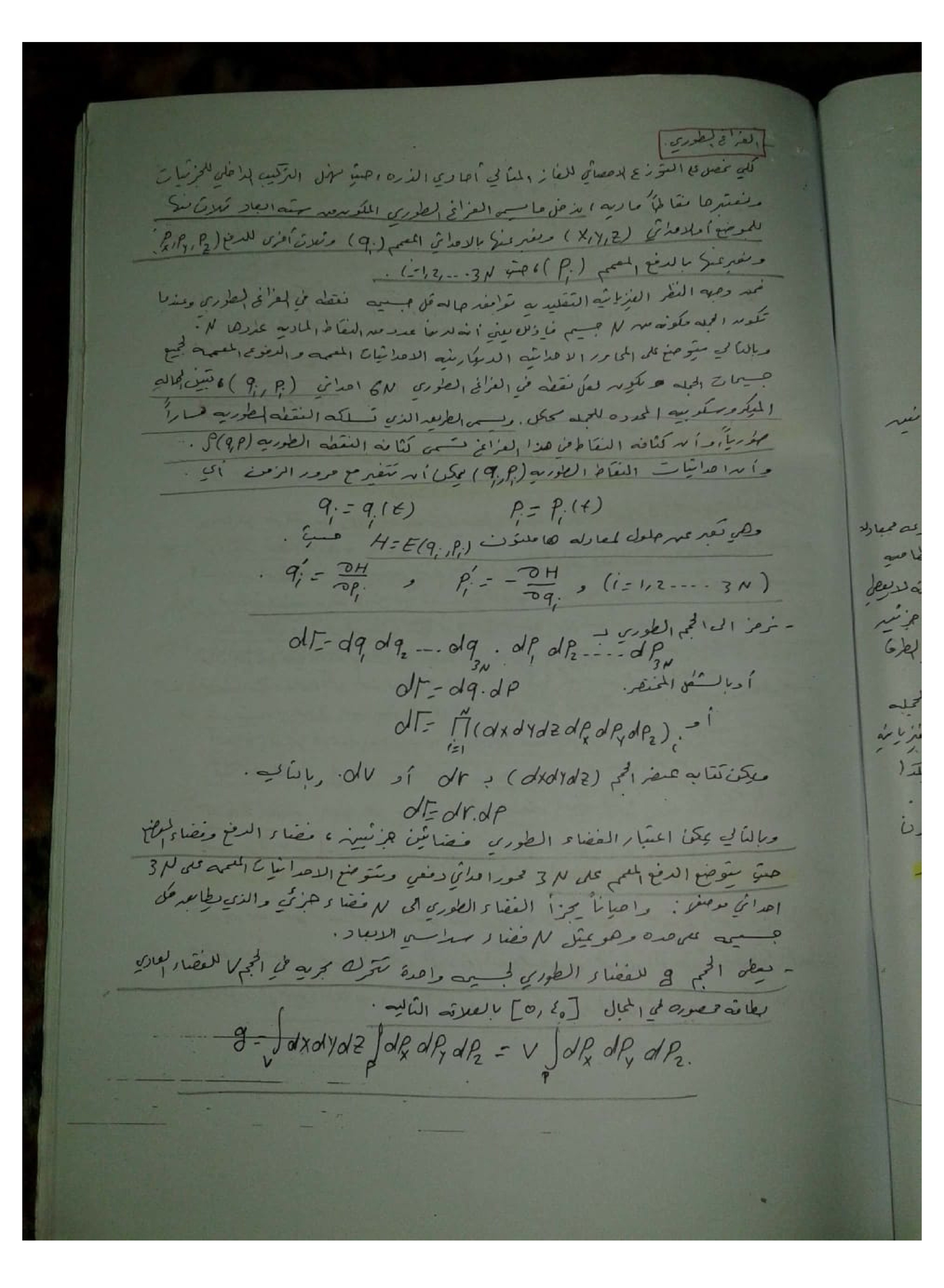
الطبيعة الاحصائية:

لفهم جوهر الطريقة الاحصائية نورد المثال البسيط التالي:
ليكن لدينا غاز مؤلفا من N جسيم (جزيء) المتبادلة التأثير فيما بينها وهي تخضع لقوانين ميكانيك نيوتن حيث أن معادلة الحركة لكل جزيء هي:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i \neq j} F_{ij}$$

حيث v_i هي سرعة الجزيء رقم i و F_{ij} هي قوة التأثير المتبادل بين الجزيئين i و j
وهذا يتطلب دراسة قوانين الحركة لكل جزيء على حده ومعالجة جملة المعادلات الكلية الموضوعة مبدأ الحركة وهذا غاية في الصعوبة لأنه كما نعلم أنه في $1\,cm^3$ من الغاز وفي الشروط النظامية يوجد $2,7\times10^{19}$ جزيء وهذا يعطي 10^{20} معادلة. وحتى في حال معالجة هذه المعادلات فإنه لا يعطي معلومات متعلقة بخصائص الغاز ككل لأن خصائص الجملة ككل لا ترتبط بخصائص كل جزيء على حده وإنما ترتبط بخصائص جماعية للجزيئات ككل وبالتالي فالطرق المفروض اتباعها هي الطرق ذات الطابع الاحصائي الاحتمالي.

إذاً تقودنا دراسة الطبيعة الاحصائية الى امكانية حساب الصفات الماكروسكوبية للجملة بالاعتماد على صفات الجزيئات المؤلفة للجملة وهذا يقودنا الى التفسير الصحيح للصفات الفيزيائية والكيميائية ولسير العمليات الماكروسكوبية للجملة في ضوء التصورات الجزيئية الحركية. وهكذا فإن القوانين الاحصائية تعطي امكانية تحديد القيم الوسطى للمقادير واحتمالاتها الممكنة.
ونضيف هنا بأن الفيزياء الاحصائية ترتبط مع الترموديناميك بشكل واسع ففي حالة التوازن تتطابق القوانين الاحصائية للجمل الماكروسكوبية مع قوانين الترموديناميك ومن هنا تأخذ الفيزياء الاحصائية للجمل المتوازنة تسمية الترموديناميك الاحصائي.



الفراغ الطوري

لكي نحصل على التوزيع الإحصائي للغاز المثالي أحادي الذرة، حيث نهمل التركيب الداخلي للجزيئات ونعتبرها نقاطاً مادية، ندخل ما يسمى الفراغ الطوري المكون من ستة أبعاد ثلاثة منها للموضع أو الإحداثي (x, y, z) ونعبر عنها بالإحداثي المعمم (q_i) وثلاث أخرى للدفع (p_x, p_y, p_z) ونعبر عنها بالدفع المعمم (p_i)، حيث $(i=1,2,\dots 3N)$.

تمثل وجهة النظر الفيزيائية التقليدية بتواجد حالة كل جسيم نقطة في الفراغ الطوري وعندما تكون الجملة مكونة من N جسيم فإن ذلك يعني أنه لدينا عدد من النقاط المادية عددها N. وبالتالي سيتوضع على المحاور الإحداثية الديكارتية الإحداثيات المعممة والدفوع المعممة لجميع جسيمات الجملة هو تكوين لكل نقطة في الفراغ الطوري $6N$ إحداثي (q_i, p_i)، تبين الحالة الميكروسكوبية المحددة للجملة ككل. ويسمى الطريق الذي تسلكه النقطة الطورية مساراً طورياً، وإن كثافة النقاط في هذا الفراغ تسمى كثافة النقطة الطورية $\rho(q,p)$.

وإن إحداثيات النقاط الطورية (q_i, p_i) يمكن أن تتغير مع مرور الزمن أي:

$$q_i = q_i(t) \qquad p_i = p_i(t)$$

وهي تعبر عن حلول لمعادلة هاملتون $H = E(q_i, p_i)$ حسب:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad و \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i=1,2,\dots 3N)$$

- نرمز إلى الحجم الطوري بـ

$$d\Gamma = dq_1\, dq_2 \dots dq_{3N} \cdot dp_1\, dp_2 \dots dp_{3N}$$

أو بالشكل المختصر

$$d\Gamma = dq \cdot dp$$

أو

$$d\Gamma = \prod_{i=1}^{N} (dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z)_i$$

ويمكن كتابة عنصر الحجم $(dx dy dz)$ بـ dr أو dV، وبالتالي:

$$d\Gamma = dr \cdot dp$$

وبالتالي يمكن اعتبار الفضاء الطوري فضائين جزئيين، فضاء الدفع وفضاء المواضع حيث سيتوضع الدفع المعمم على $3N$ محور إحداثي دفعي وستتوضع الإحداثيات المعممة على $3N$ إحداثي موضعي. وأحياناً يجزأ الفضاء الطوري إلى N فضاء جزئي والذي يطابق كل جسيم على حدة وهو يمثل N فضاء سداسي الأبعاد.

- يعطى الحجم g للفضاء الطوري لجسيم واحدة تتحرك بحرية في الحجم V للفضاء العادي بطاقة محصورة في المجال $[0, E_0]$ بالعلاقة التالية:

$$g = \int_V dx\, dy\, dz \int_p dp_x\, dp_y\, dp_z = V \int_p dp_x\, dp_y\, dp_z .$$

١٥ ... ٢٠ [illegible] حسب $\frac{1}{2m}$ ما الطاقة الحركية للجسيمات

$P_0 = \sqrt{2m\varepsilon_0}$

وعند ما إن كل الحالات الميكروسكوبية المسموح بها للجسيمات تشغل في الفضاء الزخمي كرة نصف قطرها P_0 ويعطي الحجم ب $\int dp_x dp_y dp_z = \frac{4}{3}\pi P_0^3$ وبالتالي.

$$g = \frac{4\pi}{3} V (2m\varepsilon_0)^{3/2} \quad , \quad dg = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = 4\pi m V \sqrt{2m\varepsilon}\, d\varepsilon$$

حيث dg هو الحجم الطوري العنصري الذي يمثل كل الحالات الميكروسكوبية للجسيمات في المجال الطاقي $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$.

- الطبقة والخلية

للحصول على التعبير الاحصائي العام: نعمد الى تقسيم الفراغ الطوري الى ما يسمى طبقات وخلايا وذلك لكون تابع التوزيع لا يتعلق بالاحداثيات (q_i, p_i) فقط وانما يتعلق بطاقة هذه الجسيمات (المرتبط بدورها بالاحداثيات).

$$E = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + U(x, y, z)$$

وبالتالي يتم التقسيم وذلك بواسطة تحديد سطوح سويات الطاقة في الفراغ الطوري مع الأخذ بعين الاعتبار بعض الملاحظات.

١- أن تكون الطبقات المقسمة للفراغ الطوري رقيقة الى حد يمكنه معه أن نعطي النقاط المحصورة في نطاق الطبقة بدقة كافية قيماً متساوية للطاقة، ومن جهة أخرى يجب أن تكون مقاييس الطبقة كبيرة جداً الى حد يكون معه عدد النقاط فيها N_i كبيراً بالمقارنة مع الواحد $(N_i \gg 1)$ وهذا يؤدي حتماً الى عدم تساوي الطبقات بالسماكة حسب قيم الطاقة الكبيرة والصغيرة بالنسبة للطبقات وذلك لكي تحتوي هذه الطبقات اعداداً كبيرة من النقاط الطورية.

٢- هو تساوي الخلايا بحيث ينظر الى كل الحالات على أنها تملك نفس الاحتمال. وبالتالي نقسم الفراغ الطوري الى خلايا متساوية الحجم كل منها يساوي (a) وتحتوي كل طبقة على عدد كبير جداً من الخلايا g_i حيث يجب أن يكون $g_i \gg 1$ بالاضافة الى احتوائها على عدد كبير جداً من النقاط الطورية $N_i \gg 1$ وتحقق سماكة الطبقة العلاقة التالية $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \ll \varepsilon_i$.

- مبدأ بولتزمان

وهو أحد المبادئ الاساسية التي ترتكز عليها الدراسة الاحصائية للجمل المتوازنة، حيث أن حالة التوازن الترموديناميكي تقابل في الاطار الاحصائي مفهوم التوزيع الأكثر احتمالاً وهو يوافق العدد الأعظمي للحالات الميكروسكوبية المختلفة التي يمكنه أن تحقق في الجملة من أجل توزيع معين للطاقة، وهذا العدد يساوي عدد الطرق المختلفة التي يمكنه بها أن

تتوزع جسيمات الجملة في الفراغ الطوري (أي ما بين طبقات الطاقة وما بين الخلايا)، بحيث يبقى عدد الجسيمات (النقاط الطوريه) في الطبقة الواحدة (ذات الطاقة المعينة) ثابتاً.

نسمي عدد طرق التوزيع المختلفة بـ الاحتمال الترموديناميكي، ونرمز له بالرمز Ω أو ω.

وفي حال التوازن الترموديناميكي يكون هذا العدد في نهايته العظمى وأن أصغر قيمة ممكنة له هي الواحد $(\omega = 1)$.

وأن بلوغ القيمة الصغرى له يعني تقلص عدد الحالات الميكروسكوبية الى حالة واحدة وبهذا نفرض بلوغ الجملة أقصى درجات الانتظام، وهذا من وجهة النظر الحرارية يمكن الوصول اليه عندما تنتهي درجة حرارة الجملة الى الصفر $T \to 0$. وبالطبع فإن الاحتمال الترموديناميكي يختلف عن مفهوم الاحتمال العادي المعروف لدينا.

حيث أنه نكتب اذاً الاحتمال الترموديناميكي على أنه عدد الحالات الميكروسكوبية للجملة.

$$\omega = \Omega >> 1$$

ويسمى Ω أيضاً الوزن الاحصائي للحالة الماكروسكوبية.

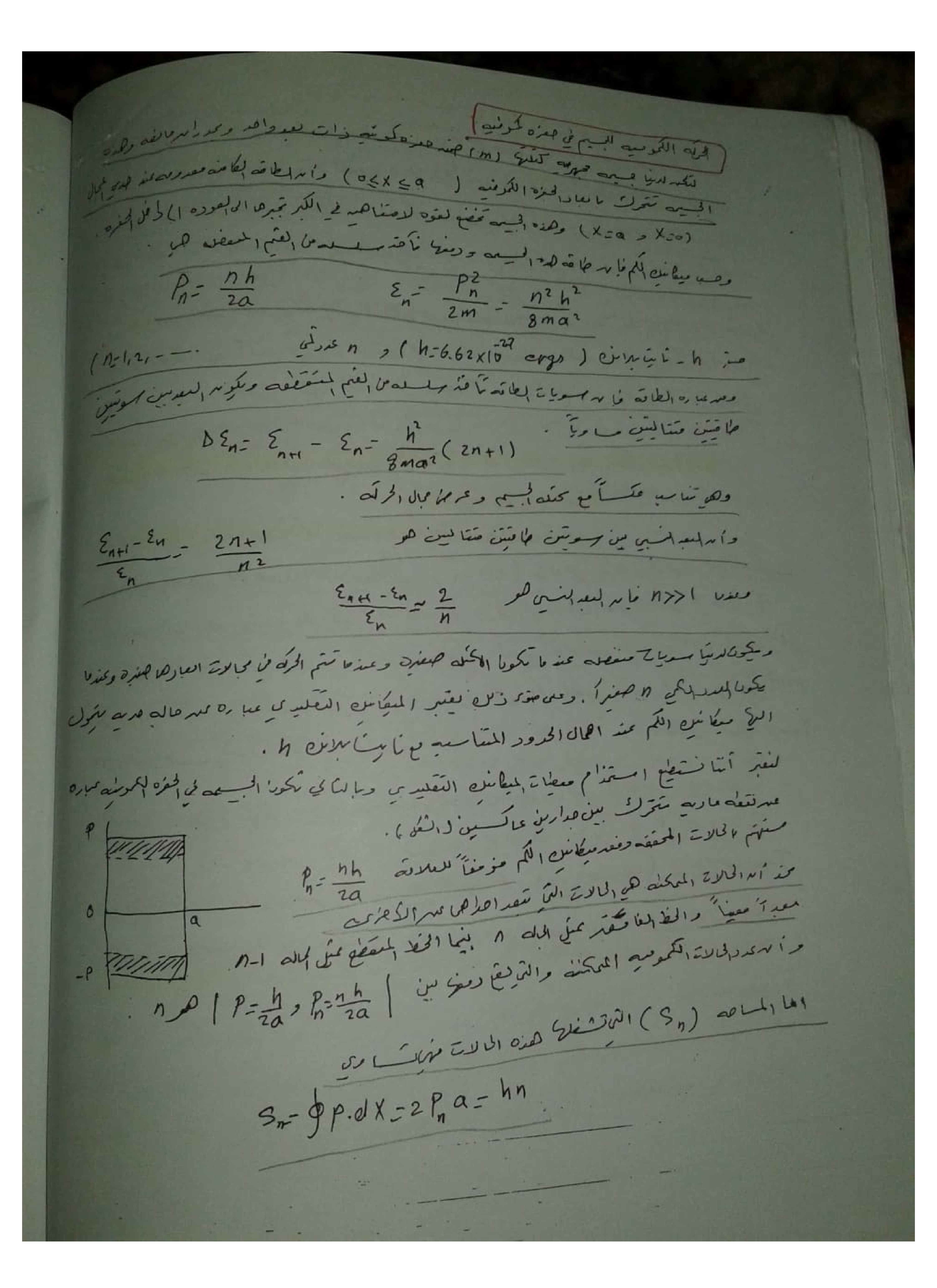
ان القيمة الصغرى للاحتمال الترموديناميكي $(\omega = 1)$ تدل على أن عدد الحالات الميكروسكوبية تتقلص الى الواحد ونحصل على هذا عندما تنتهي درجة الحرارة الى الصفر المطلق $T \to 0$.

ومن جهة أخرى تشير الدراسات الترموديناميكية الى أن أنتروبية الجملة تصل الى النهاية العظمى في حالة التوازن وعندما تنتهي درجة الحرارة للجملة الى الصفر تنتهي انتروبيتها الى الصفر حسب المبدأ الثالث في الترموديناميك. $S \to 0$ عندما $T \to 0$

وهناك رابطة وثيقة بين الانتروبية والاحتمال الترموديناميكي كما بين بولتزمان.

$$S = k \ln \omega$$ (مبدأ بولتزمان) k ثابت بولتزمان.

وفي حالة التوازن الترموديناميكي يكون $(S = S_{max})$ و $(\omega = \omega_{max})$ وعندما تنتهي $T \to 0$ فإن $\omega \to 1$ و $S \to 0$ وهذا ما يتوافق مع مبدأ بولتزمان



الحركة الكمومية لجسيم في حفرة كمونية

لتكن لدينا جسيمة مجهرية كتلتها (m) ضمن حفرة كمونية ذات بعد واحد وعرضها [illegible] وحدة

الجسيمة تتحرك بانتظام داخل الحفرة الكمونية ($0 \le x \le a$) وأن الطاقة الكامنة معدومة ضمن حدود مجال

($x=0$ و $x=a$) وهذه الجسيمة تخضع لقوة لا متناهية في الكبر تجبرها على العودة) داخل الحفرة

وحسب ميكانيك الكم فإن طاقة هذه الجسيمة وزخمها تأخذ سلسلة من القيم المنفصلة هي .

$$P_n = \frac{nh}{2a} \qquad \varepsilon_n = \frac{P_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

حيث h ـ ثابت بلانك ($h = 6.62 \times 10^{-27}$ ergs) و n عدد كمي ($n = 1, 2, \ldots$)

ومن عبارة الطاقة فإن مستويات الطاقة تأخذ سلسلة من القيم المتقطعة ويكون البعد بين مستويين طاقيين متتاليين مساوياً .

$$\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{h^2}{8ma^2}(2n+1)$$

وهي تتناسب عكساً مع كتلة الجسيم وعرض مجال الحركة .

وأن البعد النسبي بين مستويين طاقيين متتاليين هو

$$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{2n+1}{n^2}$$

وعندما $n \gg 1$ فإن البعد النسبي هو

$$\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \simeq \frac{2}{n}$$

ويكون لدينا مستويات منفصلة عندما تكون الكتلة صغيرة وعندما تتم الحركة في مجالات أبعادها صغيرة وعندما يكون العدد الكمي n صغيراً . وعلى ضوء ذلك نعتبر الميكانيك التقليدي عبارة عن حالة حدية يتحول إليها ميكانيك الكم عند إهمال الحدود المتناسبة مع ثابت بلانك h .

لنعتبر أننا نستطيع استخدام معطيات الميكانيك التقليدي وبالتالي تكون الجسيمة في الحفرة الكمونية عبارة عن نقطة مادية تتحرك بين جدارين عاكسين (الشكل) .

نستبدل بالحالات المحققة وفق ميكانيك الكم موضعاً للعلاقة $P_n = \frac{nh}{2a}$

حيث أن الحالات الممكنة هي الحالات التي تبعد إحداها عن الأخرى بعداً معيناً والخط الغامق يمثل الحالة n بينما الخط المتقطع يمثل الحالة $n-1$

وأن عدد الحالات الكمومية الممكنة والتي تقع ضمن بين $| P = \frac{h}{2a} , P_n = \frac{nh}{2a} |$ هو n .

أما المساحة (S_n) التي تشغلها هذه الحالات فهي تساوي

$$S_n = \oint P \cdot dX = 2 P_n a = hn$$

وأن قيمة هذا التكامل $\oint p.dx$ التي تشمل دورة كاملة للحركة.

$$\oint p\,dx = \int_0^a p\,dx - \int_a^0 p\,dx = 2\int p\,dx$$

فإذا أخذنا جميع الحالات الأخرى الممكنة ووصفناها مع الشكل بخطوط مميزة مثل التي لدينا لوجدنا أن السطح ينقسم بكامله الى خلايا متساوية المساحة وكل خلية ذات مساحة تساوي h.

ان المعدين الى الشكين المذكورين (n) و (n-1) مع المحور p تساوي

$$\frac{hn}{2a} - \frac{(n-1)h}{2a} = \frac{h}{2a}$$

وبالتالي نجد أن مساحة الخلية المخططة في الشكل تساوي

$$2.a.\frac{h}{2a} = h.$$

وهذا يدل على أن كل حالة ممكنة تقابل في التقريب شبه الكلاسيكي خلية مساحتها في الفضاء الطوري h

تدعى الحالات التي تحقق هذا الشرط $\oint p.dx = nh$ بالحالات المستقرة وهو متحقق في الطور

مبادئ أساسية في نظرية الاحتمالات.

نسمي احتمال وقوع حدث ما بأنه النسبة بين عدد الحالات المطلوبة وعدد الحالات الكلية $P = \frac{n}{N}$

P - احتمال وقوع الحادثة و n - عدد الحالات المطلوبة . N عدد الحالات الكلية.

وأن عدم احتمال وقوع الحدث يساوي النسبة بين عدد الحالات غير المطلوبة وعدد الحالات الكلية. $P = \frac{N-n}{N}$

فمثلاً: اذا أرسلنا سهماً على دريئة كبيرة تحتوي على دائرة مركزية فيكون احتمال وقوع السهم أو وصوله الى الدائرة المركزية للدريئة هو نسبة مساحة الدائرة المركزية الى المساحة الكلية للدريئة

فإذا كانت $P(x)$ تعبر عن احتمال وجود جسيم في الموضع (x) فإن احتمال ايجاد هذا الجسيم في المجال X=A أو X=B يساوي $\int_A^B P(x)dx$ حيث x له مجال عشوائي صغير. وبالتالي نحصل على الاحتمال من خلال التكامل على المجال المعطى.

نسمي النسبة بين عدد الحالات المطلوبة وعدد الحالات الكلية بالتواتر النسبي عندما يتكرر الحدوث عدداً كبيراً من المرات. ونسمي الاحتمال الاحصائي (التجريبي) بأنه نهاية التواتر النسبي عندما تتكرر التجربة عدداً كبيراً من المرات.

$$\omega_i = \lim_{N\to\infty} \frac{n_i}{N}$$

ω_i الاحتمال الاحصائي - n_i عدد الحالات المطلوبة - N عدد الحالات الكلية.

وعندما تكون المقادير العشوائية تابعة للزمن فإن الاحتمال

$$\omega_i = \lim \frac{\Delta t}{t}$$

Δt - زمن وقوع الحادثة، t - الزمن الكلي.

Scanned by CamScanner

تصنف المقادير العشوائية الى :

1- مقادير غير مستمرة : حيث المقدار المدروس يأخذ قيماً محدده مثل النرد (1, 2, 3, 4, 5, 6)

ونفرض أن ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) هي القيم التي يأخذها المقدار العشوائي غير المستمر فإن الاحتمالات الموافقة لهذه القيم هي ($w_1, w_2, \ldots, w_n$) فإن مجموع الاحتمالات يكون

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

2- مقادير مستمرة : المقدار المستمر هو المقدار الذي يأخذ قيماً متقاربة جداً أو كسرية وهو متغير بشكل مستمر بحيث يكون لدينا $\int dw = 1$

ويمكن التعبير عن الاحتمال (dw) من خلال تابع التوزيع الاحتمالي $f(x)$ والذي يبين كيفية توزع الاحتمالات على الحالات dx عند تغيرها x. أي ($\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 1$).

خصائص الاحتمالات .

من تعريف الاحتمال نجد أن $1 \geq w \geq 0$ وذلك بسبب كون $0 \leq n_i \leq N$

وبالتالي فإن الاحتمال لا يمكن أن يكون سالباً . وعندما يكون $w=1$ فإن وقوع الحدث يكون مؤكداً وعندما $w=0$ فإن وقوع الحادثة مستحيل.

ويحدد احتمال حدوث حادثة مركبة في كثير من الأحيان عن طريق معرفة احتمال كل حادثة على حدة وفقاً لطبيعة الحوادث، لدينا فرضيتان هامتان هي فرضية جمع الاحتمالات وفرضية جداء الاحتمالات

أولاً فرضية جمع الاحتمالات .

ليكن لدينا حادثة مركبة تتلخص في وقوع الحادثة A أو الحادثة B واللتين بدورهما تعتبران حادثتين متنافيتين (غير متقاطعتين) أي أن حدوث احدهما ينفي حدوث الأخرى ([illegible]) وحسب قانون تعريف الاحتمال نكتب الاحتمال للحادثة المركبة على النحو التالي .

(احتمال حدوث الحادثة A أو B) $W(A \cup B) = \lim \frac{n_A + n_B}{N} =$ (عدد مرات وقوع A + عدد مرات وقوع B) / عدد المرات الكلي

إذن يمكن التعبير عن العلاقة السابقة بشكل منفصل

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N} = W(A) \qquad \lim_{N \to \infty} \frac{n_B}{N} = W(B)$$

أي أن احتمال حدوث الحادثة المركبة يعبر عنه بمجموع احتمالات كل حادثة على حده .

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B)$$

ثانياً فرضية جداء الاحتمالات .

لنفرض لدينا حادثتين A, B ولنفرض أن $W_A(B)$ هي احتمال حدوث الحادثة B بعد حدوثها الحادثة A . يرتبط احتمال حدوث احدى الحادثتين بعلاقة ما بالحادثة الأخرى.

إذا كانت الحادثتان مرتبطتين فإن

$$\omega(A \cap B) = \omega(A) \cdot \omega_A(B)$$

وإذا كانت الحادثتان مستقلتين فإن

$$\omega(A \cap B) = \omega(A) \cdot \omega(B)$$

القيمة الوسطى للمقادير العشوائية

عندما يكون المقدار العشوائي غير مستمر نكتب

$$\bar{X} = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \dots + x_n \omega_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i$$

حيث ω_i هي احتمالات هذه القيم و x_i هي القيم للمقدار العشوائي غير المستمر.

وعندما يكون المقدار العشوائي مستمر نكتب:

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, d\omega(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \, dx$$

وعندما نأخذ المقدار العشوائي لبعض القيم الممكنة فإن القيمة يعبر عنها على النحو التالي.

بالنسبة للمقدار غير المستمر.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \omega_i}{\sum_{i=1}^{m} \omega_i}$$

وبالنسبة للمقدار العشوائي المستمر.

$$\bar{X} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x_i f(x) \, dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx}$$

أمثلة عن توابع التوزعات الاحصائية.

١- التوزع المنتظم للقيم المنفصلة: لنفرض لدينا مقدار عشوائي ما وأن N هي جميع القيم الممكنة للمقدار العشوائي وبالتالي فإن احتمال حصول أي قيمة عشوائية لمقدار على قيمة واحدة $\omega = \frac{1}{N}$

فأثناء رمي قطعة النرد فإن احتمال الحصول على أي من الأعداد هو $\frac{1}{6}$ وذلك لأن كل القيم الممكنة هي (6) وبالتالي فإن $\omega = \frac{1}{6}$. ويكون

$$\sum_{i=1}^{6} \omega_i = \frac{1}{6} + \dots = 1$$

٢- التوزع المنتظم للقيم المستمرة: وهذا التوزع من أبسط توابع التوزع ويكتب عادةً في مجال محدد $[a, b]$ على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} Const & a \le x \le b \\ 0 & x < a, \ x > b \end{cases}$$

ويستخدم هذا التابع عند دراسة الكثافة والطاقة ومقادير مستمرة عشوائية أخرى.

وعليه أن ينظم الى الواحد وذلك للحصول على قيمة الثابت.

$$dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = const \int_{a}^{b} dx =$$

$$const\,(b-1) = 1$$

وبالتالي فإن قيمة الثابت

$$const = \frac{1}{b-a}$$

٢- التوزيع الأسي: يستخدم هذا التوزيع بشكل واسع وخاصة عند دراسة التفكك للعناصر المشعة وعند دراسة تغير عدد الجسيمات مع الارتفاع. وله الشكل التالي

$$f(x) = const\; e^{-\alpha x}$$

حيث $0 \le x \le \infty$

ينظم هذا التابع الى الواحد للحصول على قيمة الثابت α.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = const \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{const}{\alpha} = 1$$

ومنه $const = \alpha$. وبالتالي فإن التوزيع الأسي هو.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & 0 \le x < \infty \\ 0 & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

٤- توزيع برنولي: يعطي هذا التوزيع احتمال حصول حادثة معينة عدداً كبيراً من المرات ويعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,\bar{n}!}\, p^{n}\, q^{\bar{n}}$$

حيث p - احتمال حدوث الحادثة. q - احتمال عدم حدوث الحادثة.

n - عدد مرات تكرار الحادثة

$\bar{n} = N - n$ - عدد المرات التي لا تتكرر فيها الحادثة

$N!, n!, \bar{n}!$ هي الأعداد العاملية - $N! = 1.2.3 \ldots N$

وعليه يمكن الاستفادة من توزيع برنولي عند دراسة توجه العزوم المغناطيسية بحيث يتجه n عزماً مغناطيسياً نحو الأعلى و $\bar{n}$ عزماً مغناطيسياً نحو الأسفل.

وعندما يكون $p = q = \frac{1}{2}$ نستنتج من توزيع برنولي التوزيع ثنائي الحد. وهو من الصيغة التالية

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{N}$$

٥- توزع بواسون: يعطي هذا التوزع لمقدار عشوائي منفصل غير مستمر (x) والذي يأخذ سلسلة لانهائية من الاعداد الصحيحة، من الصفر وحتى اللانهاية على الشكل التالي

$$W(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \qquad \text{حيث} \quad 0 \le x < \infty$$

حيث a ثابت له معنى القيمة المتوسطة

٦- تابع توزع غاوص: ويسمى هذا التابع، تابع التوزع الطبيعي ونصادفه عند دراسة الدرجات وعند دراسة توزعات مساقط السرع في الغاز كما ونجده عند دراسة الحركة البراونية، ويأخذ الصيغة التالية

$$f(x) = \text{Const}\; e^{-\alpha x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

ولتنظيم هذا التابع مرة أي ايجاد قيمة الثابت نعتمد على تكامل بواسون

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \text{const} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \text{const} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$$

وهذا معطى لنا $\text{const} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ وبالتالي يأخذ تابع التوزع الغاوصي الطبيعي الشكل التالي

$$f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\; e^{-\alpha x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$